Анти-теорема о полноте (привет Гёделю)

Пусть Σ — формальная система, конечная по:

- множеству аксиом $|A| = n < \infty$
- множеству правил вывода $|R| = m < \infty$
- длине вывода $l \leq L < \infty$ (максимальное число шагов)
- размеру формулы $s \leq S < \infty$ (максимальная длина строки)

Тогда Σ полна и непротиворечива.

Доказательство

1. Конечность множества утверждений

Все формулы ограничены длиной S, алфавит конечен → множество всех синтаксически корректных формул **конечно**.

Обозначим: $|F| = N < \infty$.

2. Перечислимость выводов

Для каждой формулы $f \in F$ можно проверить:

- Является ли f аксиомой? (перебор A, конечный)
- Выводима ли f за ≤ L шагов? (перебор всех последовательностей длины ≤ L, конечный)

Число возможных выводов длины ≤ L: m^L · n — **конечно**.

3. Разрешимость

Для любой формулы f:

- Перебираем все выводы длины ≤ L
- Если найден вывод f — f доказуема (истинна в Σ)
- Если найден вывод ¬f — f опровержима (ложна в Σ)
- Если ни то, ни другое — f **неразрешима в рамках ресурсов**, но не **принципиально недоказуема**

Поскольку перебор конечен, для каждой f результат получается за конечное время.

4. Полнота

Для любой $f \in F$:

- Либо f выводима (истинна)
- Либо ¬f выводима (ложна)
- Либо ни одно не выводимо за ≤ L шагов

Но третий случай — не "недоказуемость", а **ограничение ресурса L**. Увеличим L — получим результат.

В пределе (теоретическом, при $L \to \infty$, но конечном для каждой конкретной f) — каждая f разрешима.

5. Непротиворечивость

Если Σ выводит f и ¬f — это обнаруживается за конечное время (перебор выводов).

Такая Σ бракуется. Работаем только с непротиворечивыми.

Ключевое отличие от Гёделя

	Гёдель	Антитеорема
Длина вывода	Не ограничена	Ограничена L
Множество формул	Бесконечно (все конечные строки)	Конечно (ограниченные S)
Результат	Существуют недоказуемые истинные	Все разрешимы (при достаточных ресурсах)

Интерпретация

"Неполнота" Гёделя — артефакт бесконечности.

"Полнота" конечной системы — следствие конечности.

В реальности: L и S огромны, но конечны. Перебор теоретически возможен, практически неосуществим.

Но это **сложность**, не **принципиальная неразрешимость**.

Следствие для машины Тьюринга

Конечная МТ (лента ограничена M ячеек, время ограничено T шагов):

- Число состояний: |Q| · M^T · T — конечно
- Либо остановится, либо войдёт в цикл длины ≤ |Q| · M^T
- Цикл обнаруживается за конечное время

Проблема остановки разрешима для конечной МТ.